PROBLEMAS FÍSICA II

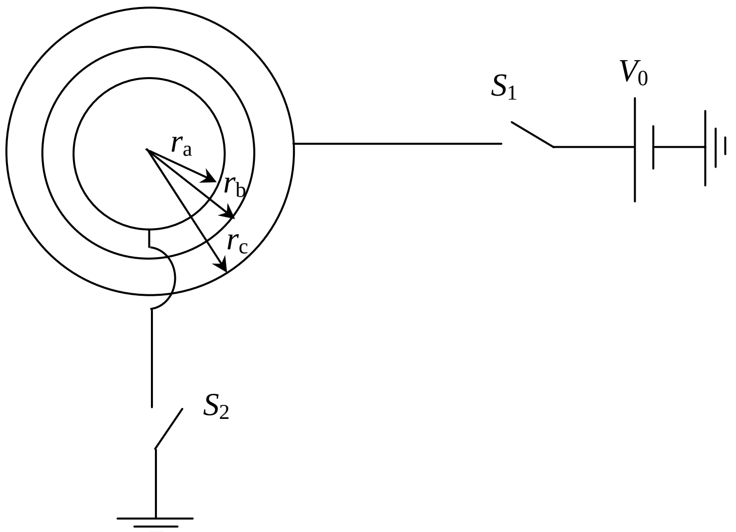
Conductores

Características de los conductores:

1) El campo eléctrico dentro del conductor es nulo ($\overline{E} = 0$)
2) $-\overline{\nabla} \cdot V = \overline{E} = 0 \Rightarrow$ el potencial no varía de un punto a otro lo cual quiere decir que todo conductor es un equipotencial.
3) El campo en la superficie de un conductor tiene dirección normal a la misma.
4) Las cargas libres en un conductor se distribuyen en la superficie.
5) La distribución de cargas no es uniforme en la superficie de un conductor sino que la densidad de carga ($\sigma_{superficial}$) será mayor para superficies conductoras con menores radios de curvatura.

Problema N° 1

Se tiene un conductor esférico de radio r_a rodeado por otro cascarón esférico de radio interno r_b y externo r_c. Entre los dos hay vacío.



Condiciones Iniciales:

- Todos los conductores se encuentras descargados
- Las llaves S_1 y S_2 abiertas

a) Se cierra S_1 manteniendo S_2 abierta.
b) Se abre S_1 y se cierra S_2.

Calcular para ambos casos:

i) las distribuciones de cargar en todas las superficies,

ii) $\overline{E}$ y V en todo el espacio.

a) S_1 cerrada y S_2 abierta.

Vamos a calcular el campo eléctrico en todo el espacio:

1) $r<r_a$

El campo eléctrico ($\overline{E}$) será nulo en esta región por estar dentro de un conductor.

La esfera interna de radio r_a se encuentra inicialmente descargada y con la llave S_1 desconectada o sea que está aislada. Por lo tanto, esta esfera continuará sin carga.

$$\sigma(r_1) = 0$$

2) $r_a<r<r_b$

Si calculamos el flujo a través de una superficie esférica de radio r, con $r_a < r < r_b$, tendremos:

$$\oint \overline{E}.d\overline{S} = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

pero por lo dicho antes: $q_{encerrada}$=0 ya que la esfera interna continúa descargada y por lo tanto el campo eléctrico será nulo en esta región también.

2) $r_b < r < r_c$

Nos encontramos dentro del conductor, por lo tanto el campo eléctrico será nulo para cualquier radio que tomemos. Esta es una condición importante que nos va a dar la relación para las cargas encerradas:

$$\overline{E} = 0$$

$$\oint \overline{E}.d\overline{S} = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow q_{encerrada} = Q(r_a) + Q(r_b) = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow Q(r_a) = -Q(r_b) = 0}$$

3) $r_c<r$

$$\oint \overline{E}.d\overline{S} = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

$$q_{encerrada} = Q(r_a) + Q(r_b) + Q(r_c)$$

$$Q(r_a) + Q(r_b) = 0$$

$$q_{encerrada} = Q(r_c)$$

$$\overline{\boldsymbol{E}} = \frac{\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r}_c)}{4\pi\varepsilon_0 \boldsymbol{r}^2}\boldsymbol{r}$$

Para calcular la cantidad de carga que hay en el cascarón metálico podemos plantear la diferencia de potencial entre tierra y el cascarón.

Al cerrar la llave S_1 estamos conectando el cascarón metálico con la tierra mediante una batería o pila. La tierra es una fuente ilimitada de cargas. La función de la pila es mover cargas entre los conductores a los cuales esta conectada hasta generar una diferencia de potencial dada (V_0 en nuestro caso). *La pila no crea ni destruye cargas*.

$$\int_{V_\infty=0}^{V_0} dV = -\int_{\infty}^{r_c} \overline{E}\cdot d\overline{r}$$

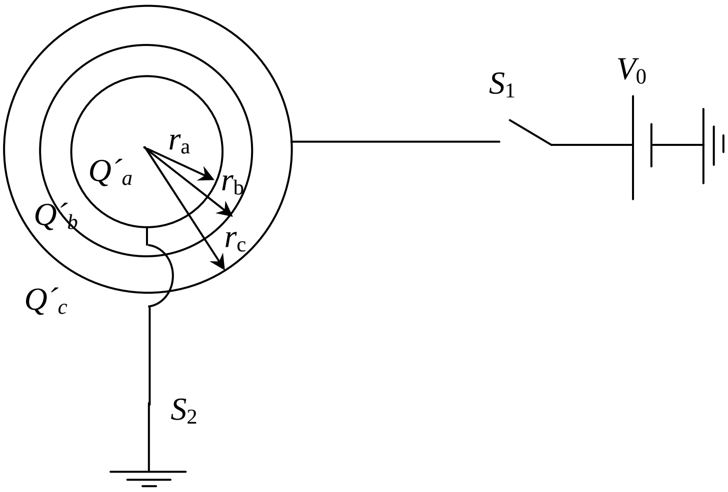
$$V_0 - V_\infty = -\int_{\infty}^{r_c} \frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_0 r_c}$$

$$\boxed{Q_c = 4\pi\varepsilon_0 r_c V_0}$$

$$\boxed{\sigma(r_c) = \frac{\varepsilon_0 V_0}{r_c}}$$

La carga distribuida sobre el cascarón es positiva ya que $V_0 > 0$.

b) S_1 abierta y S_2 cerrada.



Planteamos la condición de conservación de la carga para el cascarón. Como el cascarón no está conectado a ningún lugar la carga total en r_b más la carga en r_c tiene que ser la misma que la que tenían al final del problema anterior y como solo teníamos carga sobre r_c planteamos:

$$Q'_b + Q'_c = Q_c = 4\pi\varepsilon_0 r_c V_0$$

Entre r_b y r_c el campo sigue siendo nulo, ya que estamos dentro del conductor, por lo tanto:

$$Q'_a + Q'_b = 0$$
$$Q'_a = -Q'_b$$

Llegamos a un sistema de 2 ecuaciones con tres incógnitas.

Sabemos que el conductor interno está conectado a tierra. Esto significa que el potencial de ese conductor es cero. La tierra es una fuente ilimitada de cargas. Las cargas pueden migrar desde el conductor hacia tierra o venir desde tierra hacia el conductor hasta que la diferencia de potencial entre el conductor y tierra sea nula. Entonces:

$$\int_{V_\infty=0}^{V(r_a)} dV = -\int_{\infty}^{r_a} \overline{E} \cdot d\overline{r}$$

$$V(r_a) - V_\infty = -\int_{\infty}^{r_c} \frac{Q'_c}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr - \int_{r_c}^{r_b} 0 - \int_{r_b}^{r_a} \frac{Q'_a}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$0 = \frac{Q'_c}{4\pi\varepsilon_0 r_c} + \frac{Q'_a}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

Sabiendo que: $Q'_c = Q_c - Q'_b$ llegamos a:

$$Q'_a = \frac{Q_c}{r_c} \cdot \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_c}\right)}\right]$$

Como $\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right) < 0$ y resto un valor positivo $\frac{1}{r_c}$ dará más negativo aún. Por lo tanto

$$Q'_a < 0$$

$$Q'_a = -Q'_b \Rightarrow Q'_b > 0$$

Teniendo todas las distribuciones de carga podemos fácilmente calcular el campo y el potencial eléctrico en todo el espacio.